Hertentamen Fouriertheorie, 31 augustus 2006
Dit tentamen kan pas nagekeken worden na 12 september 2006.

(1) Geef de definitie van een Hilbertruimte. Kan een Hilbertruimte dimensie $n < \infty$ hebben? Zo ja, geef daar een voorbeeld van. Geef een expliciet voorbeeld van een Hilbertruimte met oneindige dimensie voorzien van een orthonormale basis.

(2) Wat is de definitie van een Banachruimte? Laat E de lineaire ruimte zijn bestaande uit de continue funkties $f : [0, 10] \to \mathbf{R}$ voorzien van de norm $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in [0, 10]\}$. Beredeneer dat E een Banach ruimte is. Laat zien dat E geen Hilbertruimte is. Laat $\{f_n\}$ een rij elementen van E. Wat betekent dat deze rij uniform convergeert op $[0, 10]$?

(3) De funkties $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ worden gegeven door
$f_n(x) = 2 + 3\cos(x)^n - 2\sin(x)^n$.
(a) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2$ bijna overal op $[0, 2\pi]$.
(b) Volgens welke stelling is $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n dx = 4\pi$?

(4) (a) Geef de definitie van een meetbare deelverzameling van $\mathbf{R}^m$.
(b) Wat betekent $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$?
(c) Hoe wordt $L^2(\mathbf{R})$ gedefiniëerd?

(5) Geef de definitie van: 'verzameling met Lebesgue maat 0' en een voorbeeld van een oneindige deelverzameling A van $[0, 1]$ met Lebesgue maat 0.

(6) Formuleer Dirichlets stelling over convergentie van Fourierreeksen.

(7) $f(x)$ is de 2π-periodieke funktie die voldoet aan $f(x) = \max(0, x)$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Bereken de Fourierreeks R van f. Voor welke x geldt $R(x) = f(x)$?

(8) Bewijs dat de Fourierreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3} \cos(nx)$ uniform convergeert naar een continue differentieerbare funktie.

(9) $f(x) := xe^{-\pi x^2}$. Bereken $\|f\|_2$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.

(10) Bereken de convolutie $f * g$ van de functies $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, gegeven door $f(x) = e^{-5x^2}$ en $g(x) = e^{-7x^2}$. N.B. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.